Metrički prostori

<u>Definicija metričkog prostora</u>. Metrički prostor je neprazan skup M objekata (koje zovemo tačke) zajedno sa funkcijom d sa $M \times M$ u $\mathbb{R}$ (koju zovemo metrika prostora) koja za sve tačke x, y, z iz M zadovoljava sljedeće četri osobine:

1. $d(x,x) = 0$
2. $d(x,y) > 0$ ako je $x \neq y$,
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Nenegativan broj $d(x,y)$ se može tumačiti kao udaljenost od x do y. U ovom smislu intuitivno značenje osobina 1, 2, 3 i 4 je jasno.

Četvrta osobina se naziva nejednakost trougla.

Nekad ćemo metrički prostor označiti sa (M, d) čime ćemo naglasiti oboje i skup M i metriku d, oboje uzeto iz definicije metričkog prostora.

(#) Neka je M neprazan skup i neka je data f-ja $d: M \times M \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$d(x,y)=0 \text{ ako je } x=y$$
$$\text{i } d(x,y)=1 \text{ ako je } x \neq y.$$

Pokazati da je (M,d) metrički prostor (data metrika d se naziva diskretna metrika, a prostor (M,d) je poznat kao diskretni metrički prostor).

Rj. Pokažimo da vrijede četri osobine iz definicije metričkog prostora.

I $d(x,x)=0$.

Kako je $d(x,y)=\begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x=y \end{cases} \Rightarrow d(x,x)=0$
vrijedi prva osobina

II $d(x,y)>0$ ako $x \neq y$.

$d(x,y)=\begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x=y \end{cases} \Rightarrow$ za $x \neq y$ $d(x,y)=1>0 \Rightarrow$ vrijedi druga osobina

III $d(x,y)=d(y,x)$.

Trivijalno $\Rightarrow$ vrijedi treća osobina

IV $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

Neka je $x \neq y$, $x \neq z$ i $y \neq z$. Tada $d(x,y)=1$, $d(x,z)=1$, $d(z,y)=1$ pa imamo $d(x,y)=1 \leq 1+1 = d(x,z)+d(z,y)$
vrijedi četvrta osobina

(M,d) jest metrički prostor.

(#) Neka je dat skup $M = \mathbb{C}$ (kompleksna ravan) i f-ja $d: M \times M \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

za svako $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pokazati da je (M, d) metrički prostor.

Rj. Prema definiciji, da bi pokazali da je (M, d) metrički prostor trebamo pokazati da vrijede sljedeće četri osobine

(a) $d(z_1, z_1) = 0$

(b) $d(z_1, z_2) > 0$ ako je $x \neq y$

(c) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$

(d) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$

za $\forall z_1, z_2, z_3 \in M$.

$z_1 = a_1 + i b_1$ $\qquad |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z_2 = a_2 + i b_2$ $\qquad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

Pokažimo prvu osobinu $d(z_1, z_1) = 0$.

$$d(z_1, z\ ) = |z_1 - z\ | = \sqrt{(a_1 - a\ )^2 + (b_1 - b\ )^2}$$

vrijedi prva osobina

Pokažimo drugu osobinu $d(z_1, z_2) > 0$ ako $x \neq y$.

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{\underbrace{(a_1 - a_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(b_1 - b_2)^2}_{\geq 0}} > 0$$

vrijedi druga osobina

Bar jednu od razlika $a_1 - a_2$ ili $b_1 - b_2$ je strogo veća od nule.

Pokažimo treću osobinu $d(z_1,z_2)=d(z_2,z_1)$.

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}=d(z_2,z_1)$$

vrijedi treća osobina.

Pokažimo još da vrijedi četvrta osobina $d(z_1,z_2)<d(z_1,z_3)+d(z_3,z_2)$

Prvo primjetimo da je

$$|z_1+z_2|^2=(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+b_1^2+2b_1b_2+b_2^2$$

$$=a_1^2+b_1^2+2\underbrace{(a_1a_2+b_1b_2)}+a_2^2+b_2^2$$

prema Koši-Švarcovoj nejednakosti ovaj dio je $\leq (a_1^2+a_2^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2+b_2^2)^{\frac{1}{2}}$

$$< a_1^2+b_1^2+2(a_1^2+b_1^2)^{\frac{1}{2}}(a_2^2+b_2^2)^{\frac{1}{2}}+a_2^2+b_2^2$$

$$=\left((a_1^2+b_1^2)^{\frac{1}{2}}+(a_2^2+b_2^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |z_1+z_2|\leq (a_1^2+b_1^2)^{\frac{1}{2}}+(a_2^2+b_2^2)^{\frac{1}{2}}=|z_1|+|z_2| \quad \dots (*)$$

Sad imamo

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=|z_1-z_3+z_3-z_2|\overset{(*)}{\leq}|z_1-z_3|+|z_3-z_2|$$

$$=d(z_1,z_3)+d(z_3,z_2)$$

vrijedi četvrta osobina

(M,d) je metrički prostor.

(#) Neka je dat skup $\mathcal{M}=\mathbb{R}^n$ i f-ja $d:\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ definisana sa

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \ldots + |x_n-y_n|$$

za svako $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$. Pokazati da je $(\mathcal{M},d)$ metrički prostor.

Rj:

Pokažimo da vrijede četri osobine iz definicije metričkog prostora.

I $d(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$.

$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$

$d(\mathbf{x},\mathbf{x}) = |x_1-x_1| + |x_2-x_2| + \ldots + |x_n-x_n| = 0$ vrijedi prva osobina

II $d(\mathbf{x},\mathbf{y})>0$ ako $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$

Ako je $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ tada se bar jedna koordinata x_i razlikuje od y_i $(\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n))$ pa je

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \underbrace{|x_1-y_1|}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{|x_i-y_i|}_{>0} + \ldots + \underbrace{|x_n-y_n|}_{\geq 0} > 0$$ vrijedi druga osobina

III $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$

Kako za proizvoljne realne brojeve $x_i,y_i\in\mathbb{R}$ vrijedi $|x_i-y_i|=|y_i-x_i|$ to je $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n| = |y_1-x_1|+\ldots+|y_n-x_n| = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$

vrijedi treća osobina

IV $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y})$

Za proizvoljne realne brojeve $a,b\in\mathbb{R}$ vrijedi nejednakost trougla $|a+b|\leq|a|+|b|$. Iz ove nejednakosti vidimo da $|a-c+c-b|=|a-c|+|c-b|$. Prema tome

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n| = |x_1-z_1+z_1-y_1|+\ldots+|x_n-z_n+z_n-y_n| \leq$$

$$\leq |x_1-z_1|+\ldots+|x_n-z_n| + |z_1-y_1|+\ldots+|z_n-y_n| = d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{x})$$ vrijedi četv. osob.

(#) Ako je (M, d) metrički prostor, definišimo

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

Dokazati da je d' također metrika za M. Primijetimo da $0 \leq d'(x,y) < 1$ za sve $x, y \in M$.

Rj.: Dokažimo da d' zadovoljava četri osobine iz definicije metričkog prostora.

I $d'(x,x)=0$

$$d'(x,x) = \frac{d(x,x)}{1+d(x,x)} = \frac{0}{1} = 0 \implies \text{vrijedi prva osobina}$$

II $d'(x,y)>0$ ako $x \neq y$

$$d'(x,y) = \frac{\overbrace{d(x,y)}^{>0,\ x\neq y}}{1+\underbrace{d(x,y)}_{>0,\ x\neq y}} > 0 \text{ za } x \neq y \implies \text{vrijedi druga osobina}$$

III $d'(x,y) = d'(y,x)$

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y,x) \implies \text{vrijedi treća osobina}$$

IV $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)} \overset{\text{kako je } d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)}{\leq}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} =$$

$$= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq$$

$$\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = d'(x,z) + d'(z,y)$$

Prema tome, kako vrijede osobine (I)-(IV), imamo da je d' također metrika za M. Očigledno je $0 \leq d'(x,y) < 1$ za sve $x, y \in M$.

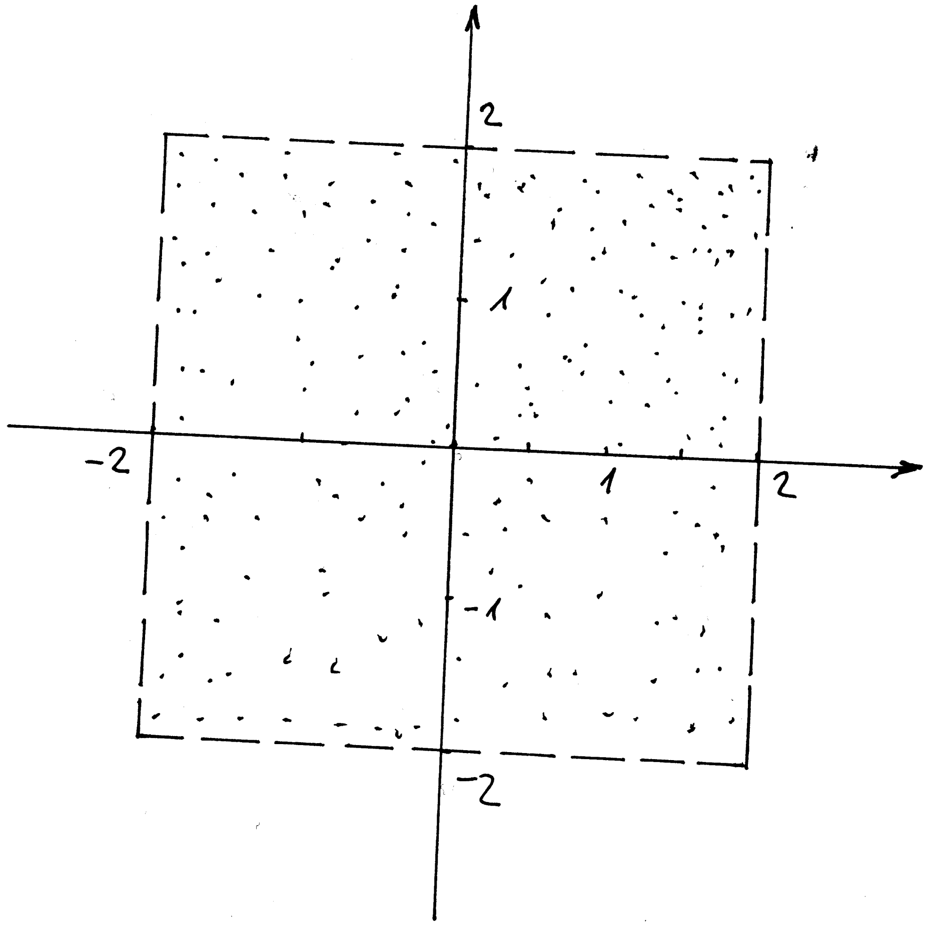
(#) Dat je metrički prostor $(\mathbb{R}^2, d)$ gdje je

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{1\le i\le 2} |x_i - y_i| .$$

Za datu fiksiranu tačku $\mathbf{a}=(0,0)$ geometrijski prikazati skup $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{a},\mathbf{x})<2\}$.

Rj. Ako sa $\mathbf{x}$ označimo $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, kako je $\mathbf{a}=(0,0)$ to je

$$\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{a},\mathbf{x})<2\} = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1-0|, |x_2-0|\}<2\}$$
$$= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\}<2$$



Pitanje: Ako je $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{1\le i\le 3} |x_i-y_i|$ u $\mathbb{R}^3$, kako bi geometrijski izgledao skup $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid d(\mathbf{a},\mathbf{x})<2\}$ za $\mathbf{a}=(0,0,0)$?

(#) Dat je metrički prostor $(\mathbb{R}^2, d)$ gdje je

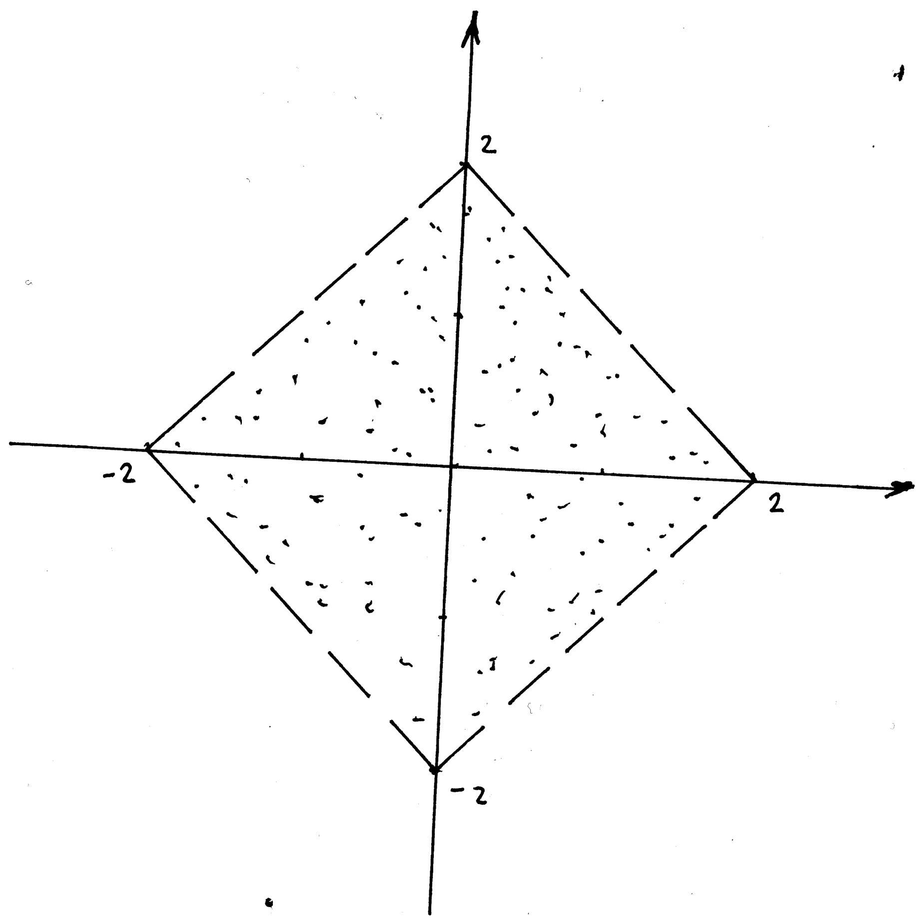
$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$$

Geometrijski prikazati skup $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x},\mathbf{a})<2\}$, ako za $\mathbf{a}$ uzmemo $\mathbf{a}=(0,0)$.

Rj.:

$\mathbf{x}=(x_1,x_2)$
$\mathbf{a}=(0,0)$ $\Rightarrow$ $d(\mathbf{x},\mathbf{a}) = |x_1-0|+|x_2-0| = |x_1|+|x_2|$

$$\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{a},\mathbf{x})<2\} = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid |x_1|+|x_2|<2\}$$



Pitanje: Ako posmatramo metrički prostor $(\mathbb{R}^3, d)$ gdje je $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i|$ koje geometrijsko tijelo bi predstavljao skup $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid d(\mathbf{x},\mathbf{a})<2\}$ gdje je $\mathbf{a}=(0,0,0)$?

(#) Neka je dat skup $M = \mathbb{R}^n$ i f-ja $d: M \times M \to \mathbb{R}$ definisana sa $d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ za svako $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ iz M. Pokazati da je (M, d) metrički prostor (data metrika d je poznata kao Euklidova metrika).

R: Prema definiciji metričkog prostora, M je metrički prostor ako vrijede slijedeće četri osobine

1. $d(x,x) = 0$
2. $d(x,y) > 0$ ako je $x \neq y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

za $\forall x, y, z \in M$.

Pokažimo prvu osobinu.

$$d(x,x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} 0 \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

vrijedi prva osobina

Pokažimo drugu osobinu.

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

kako je $x \neq y$ bar jedan od ovih članova je > 0 (u suprotnom bi imali $x = y$ # kontradikcija)

$\Rightarrow$ vrijedi druga osobina

Pokažimo treću osobinu.

$$d(x,y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x_k - y_k)^2}_{((-1)(y_k - x_k))^2} \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = d(y,x).$$

vrijedi treća osobina

Prije nego pokažemo četvrtu osobinu, prisjetimo se i dokažimo <u>Koši-Švarcovu nejednakost</u>:

<u>Koši-Švarcova nejednakost</u> Ako su $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ proizvoljni realni brojevi, vrijedi

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \Big)$$

Štaviše, ako je neki $a_i \neq 0$ jednakost vrijedi akko postoji realan x takav da $a_k x + b_k = 0$ za svaki $k = 1, 2, \dots, n$.

dokaz: Suma kvadrata ne može nikada biti negativna, pa za svaki realan x

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$$

gdje jednakost vrijedi akko je svaki član jednak nuli.
Ako ovu sumu raspišemo

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n)^2 =$$

$$= (a_1^2 x^2 + 2a_1 b_1 x + b_1^2) + (a_2^2 x^2 + 2a_2 b_2 x + b_2^2) + \dots + (a_n^2 x^2 + 2a_n b_n x + b_n^2)$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Big) x^2 + 2 \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \Big) x + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \Big) \geq 0.$$

Pa ako sa A, B i C označimo

$$A=\sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad B=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad C=\sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

vrijedi $Ax^2+2Bx+C \geq 0$,

(primjetimo da ova nejednakost vrijedi za $\forall x \in \mathbb{R}$)

Ako je $A>0$ (tj. ako postoji bar jedan $a_k \neq 0$) stavljajući da je $x=-\frac{B}{A}$ dobijemo

$$A \cdot \frac{B^2}{A^2} + 2B\cdot\left(-\frac{B}{A}\right) + C \geq 0$$

$$\frac{B^2}{A} - \frac{2B^2}{A} + C \geq 0 \quad / \cdot A$$

$$-B^2 + AC \geq 0$$

$$B^2 \leq AC \quad \text{i tvrdnja slijedi}$$

Ako je $A=0$ dokaz je trivijalan.

Pokažimo četvrtu osobinu tj. da je $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$.

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

~~Prvo~~ primjetimo $\sum_{k=1}^{n} (x_k+y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2+2x_k y_k+y_k^2) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \overset{\text{Koši-Švarc nejedn.}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Time smo dobili da je

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots (*)$$

Sad imamo

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k+z_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\left((x_k-z_k)+(z_k-y_k)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(*)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(x,z) + d(y,z)$$

Vrijedi nejednakost trougla.

Prema tome dati prostor jest metrički prostor.

(#) Dat je skup $M = \{(x_1; x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ (jedinični krug u $\mathbb{R}^2$) i f-ja $d: M \times M \to \mathbb{R}$ definisana na sljedeći način

$d(x,y)$ = dužina najmanjeg luka koji spaja dvije tačke x i y na jediničnom krugu

Provjeriti da li je (M, d) metrički prostor.

Rj.

(M, d) je metrički prostor akko za bilo koje tri tačke $x, y, z \in M$ vrijede sljedeće četri osobine

1. $d(x,x) = 0$
2. $d(x,y) > 0$ ako $x \neq y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Provjerimo prvu osobinu.

Posmatrajmo tačku $M(x,y)$. Tada $d(M, M) = d(\underbrace{(x;y)}_{x}, \underbrace{(x;y)}_{x}) = 0$

$\Rightarrow$ vrijedi prva osobina

Provjerimo drugu osobinu.

Prvo primjetimo da se dati krug može parametrizirati na sljedeći način
$x_1 = \cos\varphi$
$x_2 = \sin\varphi$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

pa za proizvoljne dvije tačke $M(x,y)$ i $N(x_1, y_1)$ možemo posmatrati neki ugao φ_0 i neki ugao φ_1. Znamo da se dužina luka f-je $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$ računa po formuli $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

pa je dužina luka od φ_0 do φ_1 u stvari $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi$.

Zbog kraćeg zapisa kraći luk ćemo obilježiti sa $|\varphi_1 - \varphi_0|$.

$$d(x, y) = d(\varphi_0, \varphi_1) = |\varphi_1 - \varphi_0| > 0 \quad \text{za } \varphi_1 \neq \varphi_0$$

vrijedi druga osobina.

Provjerimo treću osobinu.

$$d(x, y) = d(\varphi_0, \varphi_1) = |\varphi_1 - \varphi_0| = |\varphi_0 - \varphi_1| = d(y, x)$$

vrijedi treća osobina

Provjerimo četvrtu osobinu.

$$\varphi \; d(x, y) = d(\varphi_0, \varphi_1) = |\varphi_1 - \varphi_0| = |\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_0| \leq$$

$$\leq |\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_2 - \varphi_0| = d(x, z) + d(z, y)$$

vrijedi četvrta osobina

(M, d) jest metrički prostor.

Topologija tački u metričkom prostoru

Posmatrajmo metrički prostor (M, d).

Ako je $a \in M$, kugla $B(a; r)$ sa centrom u a i poluprečnika $r > 0$ je definisana kao skup svih x iz M takvih da

$$d(x, a) < r.$$

Nekad ćemo ovu kuglu označiti sa $B_M(a; r)$ da istaknemo činjenicu da tačke dolaze iz M. Ako je S metrički podprostor od M, kugla $B_S(a; r)$ je presjek skupa S sa kuglom $B_M(a; r)$

Primjer. U Euklidovom prostoru $\mathbb{R}^1$ kugla $B(0; 1)$ je otvoreni interval $(-1, 1)$. U metričkom podprostoru $S = [0, 1]$ kugla $B_S(0; 1)$ je poluotvoreni interval $[0, 1)$.

Napomena: Geometrijski izgled kugle u $\mathbb{R}^n$ ne mora biti "sfernog" oblika ako data metrika nije Euklidova metrika (npr. pokušajte skicirati kuglu $B(a; r)$ za sljedeće dvije metrike u $\mathbb{R}^n$ gdje je $n = 2$ i $n = 3$

$$d_1(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \;)$$

Ako je $S \subseteq M$, tačku a iz S nazivamo unutrašnja tačka od S ako neka kugla $B_M(a; r)$ čitava leži u S.

Unutrašnjost skupa $\mathcal{S}$, $\mathrm{int}\,\mathcal{S}$, je skup svih unutrašnjih tački skupa $\mathcal{S}$. Skup $\mathcal{S}$ se naziva <u>otvoren</u> u M ako su sve njegove tačke unutrašnje tačke; skup $\mathcal{S}$ se naziva <u>zatvoren</u> u M ako je $M \setminus \mathcal{S}$ otvoren u M ($M \setminus \mathcal{S} = \{x \in M \mid x \notin \mathcal{S}\}$).

<u>Primjeri</u>

(a) Svaka kugla $B_M(a;r)$ u metričkom prostoru M je otvorena u M.

(b) U diskretnom metričkom prostoru M svaki podskup $\mathcal{S}$ je otvoren. U stvari, ako je $x \in \mathcal{S}$, kugla $B(x;\frac{1}{2})$ koja se čitava sastoji od tačaka iz $\mathcal{S}$ (s obzirom da sadrži samo x) je otvorena. Time je svaki podskup od M također otvoren.

(c) U metričkom podprostoru $\mathcal{S} = [0,1]$ Euklidskog prostora $\mathbb{R}^1$, svaki interval oblika $[0,x)$ ili $(x,1]$, gdje je $0 < x < 1$, je otvoren u $\mathcal{S}$. Ovi skupovi nisu otvoreni u $\mathbb{R}^1$.

Primjer (c) nam pokazuje da ako je $\mathcal{S}$ metrički podprostor od M, otvoren skup u $\mathcal{S}$ ne mora biti otvoren skup u M.

Neka je $(\mathcal{Y}, d)$ metrički podprostor od $(\mathcal{M}, d)$, i neka je X podskup od $\mathcal{Y}$. Tada je X otvoren u $\mathcal{Y}$ akko

$$X = A \cap \mathcal{Y}$$

za neki skup A koji je otvoren u $\mathcal{M}$.

Rj.

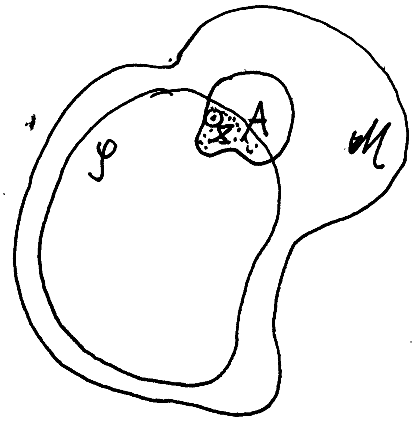
„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da je A otvoren u $\mathcal{M}$ i neka je

$$X = A \cap \mathcal{Y}$$

Ako je $x \in X$ tada $x \in A$ pa $B_{\mathcal{M}}(x; r) \subseteq A$ za neki $r > 0$. Time

$$B_{\mathcal{Y}}(x; r) = B_{\mathcal{M}}(x; r) \cap \mathcal{Y} \subseteq A \cap \mathcal{Y} = X$$

pa je X otvoren u $\mathcal{Y}$.



„$\Rightarrow$" Obrnuto, pretpostavimo da je X otvoreno u $\mathcal{Y}$. Pokazaćemo da $X = A \cap \mathcal{Y}$ za neki otvoren skup A u $\mathcal{M}$. Za svaki $x \in X$ postoji kugla $B_{\mathcal{Y}}(x; r_x)$ sadržana u X. Sada $B_{\mathcal{M}}(x; r_x) = B_{\mathcal{M}}(x; r_x) \cap \mathcal{Y}$, pa ako stavimo

$$A = \bigcup_{x \in X} B_{\mathcal{M}}(x; r_x)$$

tada je A otvoren u $\mathcal{M}$ i lagano je provjeriti da

$$A \cap \mathcal{Y} = X.$$

(#) Neka je $(\mathcal{S}, d)$ metrički podprostor prostora $(\mathcal{M}, d)$ i neka je Y podskup od $\mathcal{S}$. Tada je Y zatvoren u $\mathcal{S}$ ako i samo ako $Y = B \cap \mathcal{S}$ za neki skup B koji je zatvoren u $\mathcal{M}$.

Rj.

„$\Leftarrow$" Neka je $Y = B \cap \mathcal{S}$ za neki skup B koji je zatvoren u $\mathcal{M}$.

Kako je B zatvoren u $\mathcal{M}$ to postoji neki otvoren skup A takav da $B = \mathcal{M} \setminus A$ pa imamo

$$Y = \mathcal{S} \cap B = \mathcal{S} \cap (\mathcal{M} \setminus A) = \mathcal{S} \setminus A$$

pa je Y zatvoren u $\mathcal{S}$.

„$\Rightarrow$" Obrnuto, pretpostavimo da je Y zatvoren u $\mathcal{S}$. Označimo sa X skup $X = \mathcal{S} \setminus Y$. Tada je X otvoren u $\mathcal{S}$ pa prema prethodnom zadatku postoji skup A koji je otvoren u $\mathcal{M}$ t.d.

$$X = A \cap \mathcal{S}.$$

Sad imamo

$$Y = \mathcal{S} \setminus X = \mathcal{S} \setminus (A \cap \mathcal{S}) = \mathcal{S} \setminus A = \mathcal{S} \cap (\mathcal{M} \setminus A) = \mathcal{S} \cap B$$

gdje je $B = \mathcal{M} \setminus A$ zatvoren u $\mathcal{M}$. Time je dokaz završen.

Ako je $\mathcal{S} \subseteq M$, tačku $x \in M$ zovemo <u>adherentna</u> tačka skupa $\mathcal{S}$ ako svaka kugla $B_M(x;r)$ sadrži najmanje jednu tačku skupa $\mathcal{S}$. Ako je x adherentna tačka skupa $\mathcal{S} \setminus \{x\}$ tada tačku x nazivamo tačka <u>nagomilavanja</u> skupa $\mathcal{S}$. <u>Zatvorenje</u> $\overline{\mathcal{S}}$ skupa $\mathcal{S}$ je skup svih adherentnih tački od $\mathcal{S}$, a <u>izvodni</u> skup $\mathcal{S}'$ je skup svih tački nagomilavanja skupa $\mathcal{S}$. Prema tome

$$\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$$

Kompaktni podskupovi metričkog prostora

Neka je (M, d) metrički prostor i neka je $\mathcal{S}$ podskup od M. Familiju F otvorenih podskupova od M nazivamo <u>otvoren pokrivač</u> od $\mathcal{S}$ ako $\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{A \in F} A$.

Podskup $\mathcal{S}$ od M se naziva <u>kompaktan</u> ako svaki otvoren pokrivač od $\mathcal{S}$ sadrži konačan podpokrivač. $\mathcal{S}$ je <u>ograničen</u> ako je $\mathcal{S} \subseteq B(a;r)$ za neki $r > 0$ i neki $a \in M$.